

Opusc. PA-I-765-

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

(ANNO 1911-1912)

FREQUENZA, PREVISIONE, PROBABILITÀ

NOTA

DI

ALESSANDRO PADOA



TORINO

VINCENZO BONA

Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

1912

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*. Vol. XLVII.
Adunanza del 26 Maggio 1912.

§ 1. — La logica formale permette di rispondere esaurientemente alle domande: — Che cosa significa *applicare* una proposizione scientifica? Quali proposizioni sono *suscettibili* di applicazione? Quand'è che un'applicazione spetta alla *scienza stessa* e quando invece alla *pratica*?

Anzitutto: che cos'è, sotto l'aspetto *formale*, una proposizione scientifica?

Chiamo *costante* ogni simbolo cui è stato attribuito un significato, *variabile* ogni simbolo cui può venir sostituita una costante arbitraria, *interpretazione* di una variabile ogni costante che ci si propone di sostituire alla variabile considerata. Secondochè una proposizione, in senso *grammaticale*, che contenga una variabile, è o non è *vera* per *qualunque* interpretazione della variabile, dico che questa è *apparente* o *reale* nella proposizione considerata.

Ad es., sono formate di sole costanti le proposizioni (*):

$$(1) \quad 7 \in Np, \quad 10 \in (N_1 + 1), \quad 10 \sim \epsilon(7N), \quad 7 - 1 = 6, \quad 10^6 - 1 = 999999;$$

a e b sono variabili reali in ciascuna delle proposizioni:

$$(2) \quad a \in Np \quad b \in (N_1 + 1) \quad b \sim \epsilon(aN) \quad (b^{a-1} - 1) \in (aN)$$

a e b sono variabili apparenti nella proposizione:

$$(3) \quad a \in Np . b \in (N_1 + 1) . b \sim \epsilon(aN) . \supset . (b^{a-1} - 1) \in (aN)$$

che si può leggere: " SE a è un numero primo, SE b è un numero intero maggiore di 1 E SE b non è divisibile per a , ALLORA $b^{a-1} - 1$ è divisibile per a "

(*) Delle quali le prime tre si leggono: " 7 è un numero primo ", " 10 è un numero intero maggiore di 1 ", " 10 non è un multiplo di 7. "

e significa: " (OGNI INTERPRETAZIONE di a e di b è tale che) a NON è un numero primo, OVVERO b NON è un numero intero maggiore di 1, OVVERO b È divisibile per a , OVVERO $b^{a-1} - 1$ è divisibile per a ..

Le (1), (2), (3) danno esempio di tre tipi diversi di proposizioni, che si possono distinguere ordinatamente coi nomi di *asserzioni*, *condizioni*, *implicazioni*. Quanto precede o segue il segno " $\supset$ ", di implicazione chiamasi rispettivamente *ipotesi* e *tesi*; separatamente considerate, esse sono condizioni. L'ipotesi della (3) è una condizione che risulta dall'*affermazione simultanea* di tre condizioni.

Soltanto le asserzioni e le implicazioni sono *proposizioni*, in senso *scientifico*; non sono tali invece le condizioni, isolate e considerate.

§ 2. — *Applicare un'implicazione* significa:

1) trovare una *interpretazione* delle (o di alcune) sue variabili, per cui ciascuna delle *condizioni* (simultaneamente affermate nell'ipotesi) nelle quali entrano *soltanto* le variabili interpretate diventi un'*asserzione vera*;

2) enunciare la proposizione che risulta *cancellando* tali asserzioni e *sostituendo* ovunque le dette interpretazioni alle dette variabili (Se risultasse cancellata tutta l'ipotesi, si cancellerà anche il segno di implicazione).

Chiamo *applicazione* dell'implicazione data ogni proposizione così ottenuta; essa può essere un'*asserzione* o un'*implicazione*, nel qual caso essa è nuovamente suscettibile di applicazione; e questa è ancora un'applicazione della implicazione data (cioè può derivare da essa con un solo procedimento, anzichè con due successivi).

Ad es., a cagione delle (1), per l'interpretazione 7 di a , la (3) dà l'implicazione:

$$(3') \quad b \in N_1 + 1 . b \sim \in (7N) . \supset . (b^6 - 1) \in (7N)$$

invece, per l'interpretazione 10 di b , dà l'implicazione:

$$(3'') \quad a \in Np . 10 \sim \in (aN) . \supset . (10^{a-1} - 1) \in (aN)$$

infine la (3') per l'interpretazione 10 di b , ovvero la (3'') per l'interpretazione 7 di a , ovvero la (3) per l'interpretazione 7 di a e 10 di b , danno l'asserzione:

$$(3''') \quad 999999 \in (7N)$$

Ciascuna delle (3') (3'') (3''') è un'applicazione della (3).

Le asserzioni non sono suscettibili di applicazione; esse forniscono invece i dati per l'applicazione di implicazioni.

§ 3. — Secondochè, quali interpretazioni delle variabili di un'implicazione spettante ad una scienza, si usano costanti *tutte* o *non tutte* spettanti alla scienza stessa, l'applicazione risulta rispettivamente una proposizione della *scienza stessa* (che io chiamo *corollario* dell'implicazione data) o una *conclusione pratica* (tale essendo, rispetto alla scienza considerata, anche una proposizione spettante ad altra scienza). Infatti, soltanto nel primo caso, la scienza stessa deve e può *accertare* la *verità* delle *asserzioni* in cui si trasformano alcune condizioni dell'ipotesi, per la prescelta interpretazione delle variabili (asserzioni che andranno eliminate nell'applicazione); mentre, nel secondo caso, le asserzioni stesse non sono più di pertinenza della scienza considerata, la quale perciò nè *deve* nè *potrebbe* in alcun modo accertarne la verità, senza esorbitare dal proprio campo.

Ad es., la implicazione (3) e le asserzioni (1) appartenendo all'Aritmetica, anche le applicazioni (3') (3'') (3''') appartengono all'Aritmetica, e sono perciò corollari della (3). Anzi la (3) è suscettibile *soltanto* di *corollari* e non di *conclusioni pratiche*, perchè nessuna delle condizioni della sua ipotesi potrebbe diventare un'asserzione *vera* per interpretazioni non aritmetiche delle variabili.

Sia invece, ad es., l'implicazione:

$$(4) \quad a, b \in \text{Cls} . \text{Num } a, \text{Num } b \in N_0 . a \cap b = \bigwedge . \supset . \\ \text{Num } a + \text{Num } b = \text{Num } (a \cup b)$$

cioè: " se a e b sono *classi*, a ciascuna delle quali appartiene un *numero finito* (0 non escluso) di *oggetti arbitrari*, e se nessuno di questi è *comune* ad a e a b , allora la *somma* del numero

degli a e del numero dei b è il numero degli oggetti della riunione di a e di b „.

Quest'implicazione può essere applicata in due modi: sostituendo ad a e a b gruppi di *numeri*, ovvero gruppi di *altri* oggetti qualunque (mele, castagne, ecc.); l'applicazione sarà rispettivamente un *corollario* della (4) o una *conclusione pratica*.

Ecco un es. di applicazione del primo tipo. Premesso che:

$$m, n \in N_0 . \supset . m \cdots n = N_0 \cap x \ni (m \leq x \leq n)$$

cioè: “ se m ed n sono numeri interi assoluti, la scrittura $m \cdots n$ rappresenta l'insieme dei numeri interi assoluti che non sono minori di m nè maggiori di n „ e supposte note le asserzioni:

$$\begin{array}{lll} (1 \cdots 5) \in \text{Cls} & (6 \cdots 8) \in \text{Cls} & \text{Num } (1 \cdots 5) = 5 \\ 5 \in N_0 & \text{Num } (6 \cdots 8) = 3 & 3 \in N_0 \\ (1 \cdots 5) \cap (6 \cdots 8) = \wedge & (1 \cdots 5) \cup (6 \cdots 8) = 1 \cdots 8 & \text{Num } (1 \cdots 8) = 8 \end{array}$$

(le quali, alla lor volta, sono applicazioni di altre implicazioni aritmetiche), la (4) dà il *corollario*:

$$5 + 3 = 8$$

Quanto alle applicazioni del secondo tipo di cui è suscettibile la (4), cioè *conclusioni pratiche*, è vero che la *Logica* stabilisce il *significato* della condizione:

$$a, b \in \text{Cls} . a \cap b = \wedge$$

e l'*Aritmetica* quello della condizione:

$$a, b \in \text{Cls} . \text{Num } a, \text{Num } b \in N_0$$

ma nessuna di queste due scienze può rendersi garante di un accertamento di tal genere, per classi formate di oggetti che non siano di loro pertinenza, e che perciò esse non hanno nemmeno la possibilità di *designare*.

§ 4. — Risposto così alle domande enunciate da principio, esaminiamo la recente *definizione di probabilità* del Peano:

$$(5) \quad a, b \in \text{Cls. Num } a \in N_1 \cdot \supset \cdot P(b, a) = \frac{\text{Num}(a \cap b)}{\text{Num } a}$$

cioè: “ se a e b sono classi e se il numero degli individui della classe a è finito e diverso da 0, allora la nuova scrittura $P(b, a)$ vale il numero degli individui comuni ad a e a b , diviso per il numero degli a ” (*).

Per quanto precede, la (5) è un'implicazione [§ 1] e perciò suscettibile di applicazioni [§ 2] che possono essere suoi corollari o conclusioni pratiche [§ 3], delle quali nè la Logica, nè l'Aritmetica sono garanti.

Ora, pur accettando la detta definizione, io mi domando se non gioverebbe cambiare la *denominazione* della scrittura “ $P(b, a)$ ”, definita con costanti logiche ed aritmetiche e perciò spettante all'Aritmetica, chiamandola ad es. “ *frequenza dei b fra gli a* ”, per riserbare la denominazione di *probabilità* ad altra scrittura altrimenti definita, come propongo più innanzi. Intanto, accettata la mia denominazione, si potranno subordinatamente accogliere le denominazioni di frequenza *nulla, scarsa, media, abbondante, totale* corrispondentemente ai suoi valori 0, fra 0 e $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, fra $\frac{1}{2}$ ed 1, 1.

In *tutte* le questioni *aritmetiche*, dette di *probabilità*, effettivamente si tratta sempre e soltanto di *frequenza* degli individui di una certa classe b fra quelli di una certa classe a , nel senso dichiarato, e perciò il cambiamento di *nomenclatura* non può portare alcun inconveniente.

(*) “ Reale Accademia dei Lincei ”, vol. XXI, serie 5*, 1° sem., fasc. 7°. Secondo questa definizione, la probabilità non si presenta come funzione di una sola variabile, cioè “ probabilità d'un avvenimento ”, ma quale funzione di due variabili, cioè “ probabilità dell'avvenimento b fra gli avvenimenti a ”; e perciò devono esser date le due classi a e b . Inoltre, non si deve aggiungere la frase solita: “ Supposto che i casi possibili siano egualmente possibili, o probabili, o verosimili ”, la quale aggiunta crea il circolo vizioso tanto dibattuto; il quale però è solo apparente, poichè la frase accennata, mentre manca di precisione quale avvertimento per chi voglia fare un'applicazione pratica della formola, rispetto a questa è una vana superfetazione.

§ 5. — In pratica, per *probabilità di un avvenimento* s'intende una *valutazione numerica della legittimità dell'attesa* (speranza o timore) dell'avvenimento dichiarato. Ora a me sembra che soltanto *alcune* di tali questioni siano *applicazioni immediate* della (5); e cioè quelle in cui le classi *a* e *b* sono *ben determinate* dalla questione stessa ed in cui, ancorchè si *parli di un individuo di a* s'intende effettivamente di *referirsi ad un qualunque individuo di a* e quindi al *numero degli a* (ad es., nelle varie questioni di probabilità relative al comune gioco del lotto, non si considera in particolar modo *una* delle estrazioni, ma il *numero* delle estrazioni diverse, cioè delle combinazioni o disposizioni di 90 oggetti a 5 a 5; e, riferendosi invece ad una lotteria, non si considera *un* biglietto, ma il *numero* dei biglietti emessi in relazione al numero ed al valore dei premi da sorteggiare).

§ 6. — Ma vi sono altri casi, in cui la questione è posta per *un solo avvenimento futuro* ed in cui la questione stessa *non determina* la classe *a*.

Dice il Peano: " La questione " qual'è la probabilità che domani piova „ non ha senso, perchè non sono enunciate le due classi *a* e *b* da cui dipende la probabilità. Vi si può rispondere completando la frase ellittica, per esempio così: la pluviosità in questo mese, o stagione, o in tutto l'anno, cioè il rapporto fra il numero dei giorni di pioggia e il numero totale dei giorni del mese, o stagione, o anno, è tanta „.

E sta bene, sotto l'aspetto aritmetico. Ma in pratica, un agricoltore, un navigante, ecc., quando pone la domanda accennata, non intende affatto che il *domani* di cui parla sia considerato come un *giorno qualunque*; una risposta che gli venisse data nel modo indicato, con *scelta arbitraria* della classe *a*, gli apparirebbe uno scherzo da dilettante di statistica. Potendo, egli si rivolgerebbe invece ad un meteorologo perfetto (fornito di dati esaurienti e di leggi infallibili) e gli chiederebbe senz'altro una *previsione sicura*; in mancanza di ciò, egli chiede al *meteorologo-statistico* una *valutazione numerica della legittimità dell'attesa* che domani piova, in un luogo determinato, *intendendo* ch'egli si valga delle *leggi note* e dei *dati meteorologici attuali*, estendendo eventualmente l'indagine nel tempo (ad istanti anteriori all'attuale) e nello spazio (ad una sfera avente centro in

quel punto e raggio opportuno), secondo il tempo che deve trascorrere dall'istante in cui la domanda *viene posta* a quello cui essa *si riferisce*.

Ed il meteorologo-statistico può seguire utilmente una via di mezzo fra la *valutazione arbitraria* e la *previsione sicura*, ricorrendo ad un concetto di *probabilità a quattro variabili*, che qui definisco:

$$(6) \quad t, d \in \text{Cls}' q . t_1 \in t . d_1 \in d . a = t \cap x \ni [c(x) = c(t_1)] . \\ b \in \text{Cls}' t . \supset . P(t_1, c, d_1, b) = \frac{\text{Num}[(a + d_1) \cap b]}{\text{Num } a}$$

Prima di commentarla, si osservi che, tranne la nuova scrittura “ $P(t_1, c, d_1, b)$ „, tutte le costanti [§ 1] in essa adoperate sono logiche od aritmetiche (*), e perciò essa spetta all'Aritmetica; essa ha forma di implicazione e perciò è suscettibile di applicazioni [§ 2], fra cui conclusioni pratiche [§ 3], delle quali, come d'ogni altra, nè la Logica nè l'Aritmetica devono o possono rendersi garanti.

Ciò premesso, ecco un sistema d'*interpretazioni pratiche* delle *variabili* contenute nella (6): sia t la classe degli *istanti* e sia t_1 un istante *precisato* (quello in cui *viene posta* la domanda); sia d la classe delle *durate* (fra un istante arbitrario e un istante pure arbitrario ma *distinto* dal primo e *successivo* ad esso) e sia d_1 una *durata precisata* (quella che deve trascorrere dall'istante t_1 all'istante $t_1 + d_1$ cui si riferisce la domanda); sia c un *sistema di circostanze precisate* (ciascuna delle quali sia valutabile, qualitativamente o quantitativamente o in ambo i modi, in ciascun istante) qui considerato quale *funzione univoca* degli istanti; tale funzione *non* essendo necessariamente biunivoca, sia a l'insieme degli istanti x per ciascuno dei quali (in pratica, per ciascuno dei quali è *noto che*) “ $c(x) = c(t_1)$ „; e sia b l'insieme degli istanti in cui (in pratica, in cui è *noto che*) *accade* un avvenimento quale l'*atteso*; allora “ la probabilità nell'istante t_1 , rispetto alle circostanze c , che al termine della durata d_1 si avveri un avvenimento b „ è la frazione che ha per denominatore il numero degli a e per numeratore il numero degli “ $a + d_1$ „ (istanti che seguono gli a di d_1) che sono dei b .

(*) La scrittura “ $\text{Cls}'q$ „ significa “ classe di quantità (numeri reali) „.

È chiaro che, se l'avvenimento fosse atteso non in un *istante* precisato " $t_1 + d_1$ ", ma entro un precisato *intervallo continuo di tempo*, i cui estremi seguano t_1 delle durate d_1 e d_2 e che si potrà rappresentare con " $(t_1 + d_1) - (t_1 + d_2)$ ", invece del gruppo di istanti " $a + d_1$ ", si dovrà considerare il gruppo di intervalli " $(a + d_1) - (a + d_2)$ ". E può anche darsi, come ho accennato, che, per uno studio più complesso della questione, la valutazione di c in ciascun istante esiga un'indagine retrospettiva per un intervallo continuo di tempo avente per secondo estremo t_1 , il quale rimarrà la sola variabile di c quando la durata d' dell'intervallo stesso sia una costante già determinata quale funzione di d_1 .

Per contro, volendo semplificar le cose, basta osservare che sempre

$$\text{Num}(a + d_1) = \text{Num } a$$

per concludere che la *probabilità* definita dalla (6) è la *frequenza* dei b fra gli " $a + d_1$ ", quale è definita dalla (5). Ma la (6) costringe *più esplicitamente* della (5), chi voglia trarne un'applicazione *pratica*, a precisare alcuni dati essenziali della questione (circostanze che accompagnano o precedono l'istante della previsione e durata fra esso e l'istante dell'attesa). L'accorgimento nel servirsi di un tale procedimento, mediante una prima raccolta di dati statistici (che andrà man mano arricchendosi) e mediante una selezione sempre più accurata delle circostanze c — così che i risultati forniti dalla formola s'allontanino dal valore $\frac{1}{2}$ (*dubbio*), per accostarsi ai valori estremi 0 ed 1 (*impossibilità e certezza*) — conduce ad una determinazione *sempre più approssimata* delle *circostanze precorritrici* del fenomeno esaminato (che, anzichè meteorologico, potrà essere fisico, fisiologico, storico, ecc.) e rende così la statistica collaboratrice non trascurabile dell'indagine scientifica.

§ 7. — Un notevole divario fra le questioni pratiche accennate nel § 5 e nel § 6 sta nel fatto che per le prime il *numero dei casi possibili* si ottiene mediante *operazioni aritmetiche* determinate, da eseguirsi coi *dati numerici* della questione; mentre per le seconde lo si ottiene *contando i dati statistici* for-

niti da tabelle, la cui maggiore o minore estensione è del tutto indipendente dai dati della questione.

Ma è doveroso soggiungere che, se di *circostanze precorritrici* si è parlato soltanto a proposito delle seconde, a ben guardare, tale divario è solo apparente.

Invero, gli *atti* compiuti per imbussolare, mescolare ed estrarre i numeri d'una lotteria costituiscono *le sole circostanze precorritrici decisive* di ciascuna estrazione. Ma poichè quegli atti, quantunque possano sembrare innocentemente semplici e uniformi, nel loro insieme sono invece complicatissimi, così (quando non vi sia intenzione o sospetto di frode) si *rinuncia* a valutare la *dipendenza* dell'estrazione da essi; e, con decisione altrettanto comoda quanto ingiustificata, si *ammette* che essa ne sia *indipendente*!

È dunque tutt'altro che equo l'abituale diverso atteggiamento di fronte alle due categorie di questioni, per cui ogni divergenza fra i *risultati statistici* delle estrazioni *compiute* e le *probabilità calcolate* sulle estrazioni *possibili* viene attribuita al caso, mentre ogni divergenza analoga a proposito di fenomeni meteorologici, economici, storici, ecc., suscita troppo facili accuse di *ignoranza*. Tuttavia, esso trova la sua ragion d'essere nell'indole diversa delle circostanze precorritrici delle due categorie di avvenimenti: in quanto le prime, mentre sfuggono all'osservatore superficiale, non attraggono lo scienziato che le considera quali *modalità convenzionali* e *modificabili a piacere*; le seconde invece, essendo totalmente o parzialmente *estranee alla volontà umana*, eccitano la curiosità, così del profano che dello scienziato, a scoprirne le *mutue dipendenze*.

Genova, 13 maggio 1912.
